

Задание

Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, построить её график

$$y = \frac{1-2x}{x^2-x-2}$$

Решение.

1. Функция определена и непрерывна на всей действительной оси, за исключением точек $x = -1$ и $x = 2$, в которых знаменатель обращается в ноль и функция неограничена. Область определения функции

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$$

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, поскольку

$$y(-x) = \frac{1+2x}{x^2+x-2}, \quad y(-x) \neq y(x), y(-x) \neq -y(x)$$

3. Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = -1$.

Предел слева

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \frac{3}{+0} = +\infty$$

Предел справа

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \frac{3}{-0} = -\infty$$

Исследуем поведение функции в окрестности точки $x = 2$.

Предел слева

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \frac{-3}{-0} = +\infty$$

Предел справа

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1-2x}{x^2-x-2} = \frac{-3}{+0} = -\infty$$

Следовательно, в данных точках имеем бесконечный разрыв 2-го рода, а прямые $x = -1$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами графика функции.

4. Интервалы монотонности и экстремумы функции.

Находим первую производную функции

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{1-2x}{x^2-x-2} \right)' = \frac{(1-2x)'(x^2-x-2) - (1-2x)(x^2-x-2)'}{(x^2-x-2)^2} = \\ &= \frac{-2(x^2-x-2) - (1-2x)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2} \end{aligned}$$

Решаем уравнение $y'(x) = 0$.

$$2x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -36 < 0$$

Решений в действительной области нет, критические точки отсутствуют.

Рассмотрим интервалы

$(-\infty; -1)$ $y'(x) > 0$ - функция возрастает;

$(-1; 2)$ $y'(x) > 0$ - функция возрастает;

$(2; +\infty)$ $y'(x) > 0$ - функция возрастает.

5. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.

Вычисляем вторую производную функции

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{2x^2 - 2x + 5}{(x^2 - x - 2)^2} \right)' = \frac{(2x^2 - 2x + 5)'(x^2 - x - 2)^2 - (2x^2 - 2x + 5)((x^2 - x - 2)^2)'}{(x^2 - x - 2)^4} = \\ &= \frac{(4x - 2)(x^2 - x - 2)^2 - (2x^2 - 2x + 5)2(x^2 - x - 2)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^4} = \\ &= \frac{(4x - 2)(x^2 - x - 2) - 2(2x^2 - 2x + 5)(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^3} = \frac{-2(2x - 1)(x^2 - x + 7)}{(x^2 - x - 2)^3} \end{aligned}$$

Уравнение $y''(x) = 0$ имеет один действительный корень $x = \frac{1}{2}$.

Рассмотрим интервалы

$(-\infty; -1)$ $y''(x) > 0$ - функция вогнута вниз;

$(-1; \frac{1}{2})$ $y''(x) < 0$ - функция выпукла вверх;

$(\frac{1}{2}; 2)$ $y''(x) > 0$ - функция вогнута вниз;

$(2; +\infty)$ $y''(x) < 0$ - функция выпукла вверх.

Таким образом, $x = \frac{1}{2}$ - точка перегиба графика функции. Значение функции в этой точке $y(\frac{1}{2}) = 0$.

6. Поведение функции на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - 2}{x - 1 - \frac{2}{x}} = \frac{-2}{\pm\infty} = 0$$

Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции. Наклонных асимптот график не имеет.

7. График функции показан на рисунке

