

Задание

Для заданной балки требуется:

1. Записать аналитические выражения и определить поперечную силу Q и изгибающий момент M на каждом силовом участке.
2. Построить эпюры Q и M , выполнить проверку построения эпюр.
3. Подобрать размеры поперечного сечения балки двух типов: круглого и прямоугольного при заданном значении h/b .
4. Провести проверку прочности более рационального сечения по нормальным напряжениям.

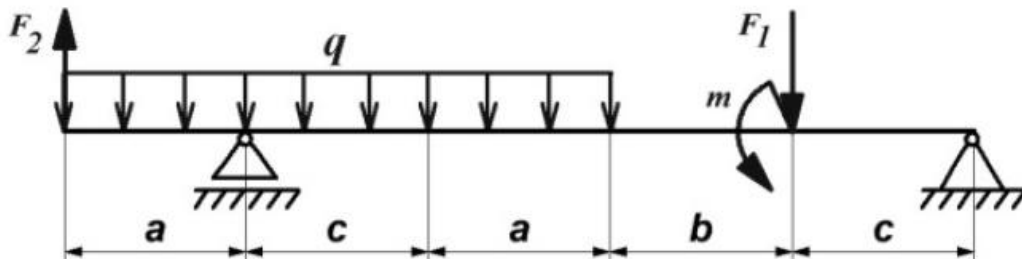


Рисунок 1 - Схема нагружения балки.

Дано:

$$a = 5 \text{ м}, b = 3 \text{ м}, c = 4 \text{ м}, d = 1 \text{ м}, F_1 = 85 \text{ кН}, F_2 = 25 \text{ кН}, q = 15 \text{ кН/м},$$

$$m = 36 \text{ кН} \cdot \text{м}, \frac{h}{b} = 2.3, [\sigma] = 145 \text{ МПа}.$$

Решение.

1. Изображаем балку на рисунке и указываем нагрузки, действующие на нее. Обозначаем опоры буквами A и B , начало балки буквой C , конец распределенной нагрузки буквой D , точку приложения силы F_1 буквой E . Поскольку горизонтальные силы отсутствуют, реакции опор имеют только вертикальные составляющие R_A и R_B .

Найдем реакции опор из условий равновесия балки.

$$\sum M_A = 0; \quad -F_2 a - q(2a + c) \cdot \frac{c}{2} - F_1(a + b + c) + m + R_B(a + b + 2c) = 0$$

Откуда

$$R_B = \frac{F_2 a + q(2a + c) \cdot \frac{c}{2} + F_1(a + b + c) - m}{a + b + 2c} =$$
$$= \frac{25 \cdot 5 + 15(2 \cdot 5 + 4) \cdot \frac{4}{2} + 85(5 + 3 + 4) - 36}{5 + 3 + 2 \cdot 4} = 95.56 \text{ кН}$$

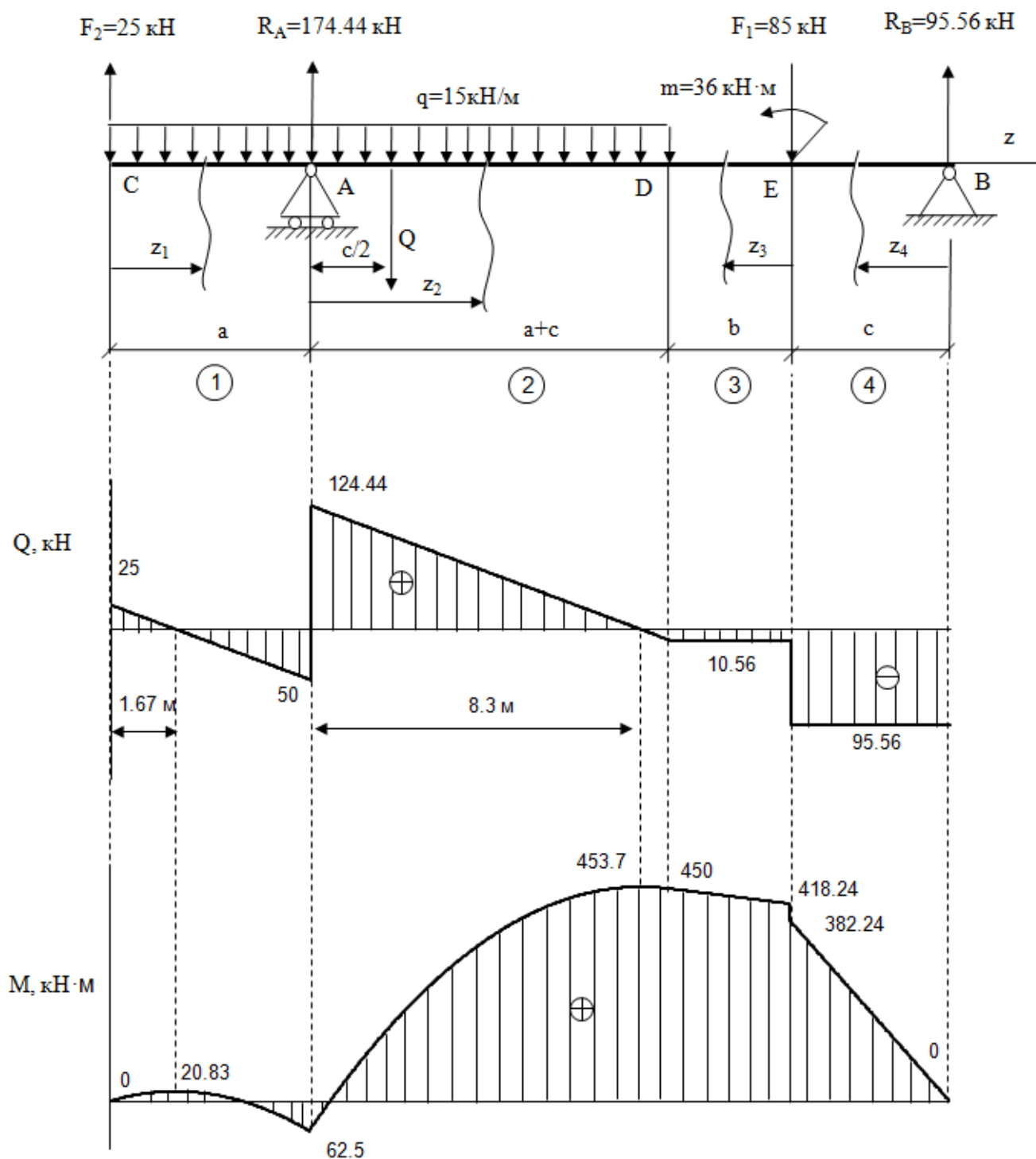


Рисунок 2 - Эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

$$\sum M_B = 0; \quad -F_2(2a + b + 2c) + q(2a + c)\left(a + b + \frac{3}{2}c\right) + F_1c + m - R_A(a + b + 2c) = 0$$

Откуда

$$R_A = \frac{-F_2(2a + b + 2c) + q(2a + c)\left(a + b + \frac{3}{2}c\right) + F_1c + m}{a + b + 2c} =$$

$$= \frac{-25 \cdot (2 \cdot 5 + 3 + 2 \cdot 4) + 15(2 \cdot 5 + 4) \cdot \left(5 + 3 + \frac{3}{2} \cdot 4\right) + 85 \cdot 4 + 36}{5 + 3 + 2 \cdot 4} = 174.44 \text{ кН}$$

Проверяем правильность расчета

$$\sum Y = R_A + R_B - q(2a + c) - F_1 + F_2 = 174.44 + 95.56 - 15 \cdot 14 - 85 + 25 = 0 - \text{верно.}$$

Разбиваем балку на четыре характерных участка. На каждом из них применяем метод сечений и определяем внутренние поперечные силы Q и изгибающие моменты M . При этом на участках CA и AD отбрасываем правую часть рассеченной балки, на участках DE и EB - левую часть.

Участок CA : $0 \leq z_1 < a$.

Уравнения равновесия и аналитические выражения для Q_1 и M_1

$$-Q_1 + F_2 - qz_1 = 0, \quad M_1 - F_2z_1 + qz_1 \cdot \frac{z_1}{2} = 0$$

$$Q_1 = F_2 - qz_1, \quad M_1 = F_2z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2}$$

Значения на границах первого участка

$$z_1 = 0, \quad Q_1 = F_2 = 25 \text{ кН}, \quad M_1 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z_1 = 5 \text{ м}, \quad Q_1 = 25 - 15 \cdot 5 = -50 \text{ кН}, \quad M_1 = 25 \cdot 5 - 15 \cdot \frac{5^2}{2} = -62.5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

На первом участке эпюра поперечных сил Q меняет знак. Следовательно, в этом месте эпюра изгибающего момента M имеет экстремум (максимум). Находим его

$$F_2 - qz_1 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{F_2}{q} = \frac{25}{15} = 1.67 \text{ м}$$

$$M = 25 \cdot 1.67 - 15 \cdot \frac{1.67^2}{2} = 20.83 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок AD : $0 \leq z_2 < a + c$.

Уравнения равновесия и выражения для Q_2 и M_2

$$-Q_2 + F_2 + R_A - q(a + z_2) = 0, \quad M_2 - F_2(a + z_2) - R_Az_2 + q(a + z_2) \cdot \frac{a + z_2}{2} = 0$$

$$Q_2 = F_2 + R_A - q(a + z_2), \quad M_2 = F_2(a + z_2) + R_Az_2 - q \cdot \frac{(a + z_2)^2}{2}$$

Значения на границах второго участка

$$z_2 = 0, \quad Q_2 = 25 + 174.44 - 15 \cdot 5 = 124.44 \text{ кН},$$

$$M_2 = 25 \cdot 5 - 15 \cdot \frac{5^2}{2} = -62.5 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z_2 = 9 \text{ м}, \quad Q_2 = 25 + 174.44 - 15 \cdot 14 = -10.56 \text{ кН},$$

$$M_2 = 25 \cdot (5 + 9) + 174.44 \cdot 9 - 15 \cdot \frac{(5 + 9)^2}{2} = 449.96 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

На втором участке эпюра поперечных сил Q меняет знак. Находим экстремум M

$$F_2 + R_A - q(a + z_2) = 0 \Rightarrow z_2 = \frac{F_2 + R_A - qa}{q} = \frac{25 + 174.44 - 15 \cdot 5}{15} = 8.3 \text{ м}$$

$$M = 25 \cdot (5 + 8.3) + 174.44 \cdot 8.3 - 15 \cdot \frac{(5 + 8.3)^2}{2} = 453.7 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок DE : $0 \leq z_3 < b$.

Уравнения равновесия и выражения для Q_3 и M_3

$$Q_3 - F_1 + R_B = 0, \quad -M_3 - F_1 z_3 + R_B(c + z_3) + m = 0$$

$$Q_3 = F_1 - R_B, \quad M_3 = -F_1 z_3 + R_B(c + z_3) + m$$

Значения на границах третьего участка

$$z_3 = 0, \quad Q_3 = 85 - 95.56 = -10.56 \text{ кН}, \quad M_3 = 95.56 \cdot 4 + 36 = 418.24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z_3 = 3 \text{ м}, \quad Q_3 = -10.56 \text{ кН}, \quad M_3 = -85 \cdot 3 + 95.56 \cdot (4 + 3) + 36 = 449.92 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок EB : $0 \leq z_4 < c$.

Уравнения равновесия и выражения для Q_4 и M_4

$$Q_4 + R_B = 0, \quad -M_4 + R_B z_4 = 0$$

$$Q_4 = -R_B, \quad M_4 = R_B z_4$$

Значения на границах четвертого участка

$$z_4 = 0, \quad Q_4 = -95.56 \text{ кН}, \quad M_4 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

$$z_4 = 4 \text{ м}, \quad Q_4 = -95.56 \text{ кН}, \quad M_4 = 95.56 \cdot 4 = 382.24 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По вычисленным данным строим эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M .

Проверяем эпюры. В точке A эпюра Q терпит скачек, равный R_A , а эпюра M имеет излом. В точке E эпюра Q терпит скачек, равный F_1 .

На краях балки значения Q равны F_2 и $-R_B$ соответственно.

В точке E эпюра M терпит скачек, равный m .

3. Выбираем из эпюры наибольший изгибающий момент $M_{\max} = 453.7 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Из условия прочности при изгибе определяем требуемый момент сопротивления сечения

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{453.7 \cdot 10^3}{145 \cdot 10^6} = 3.13 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 3130 \text{ см}^3,$$

где $[\sigma]$ - допускаемые нормальные напряжения при изгибе.
Момент сопротивления круглого сечения диаметром d равен

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}$$

Тогда необходимый диаметр круглого сечения

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 3130}{\pi}} = 31.7 \text{ см} \approx 32 \text{ см}$$

Площадь круглого сечения

$$A_{\text{кр}} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 32^2}{4} = 804.25 \text{ см}^2$$

Для прямоугольного сечения при $h/b = 2.3$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{h/2.3 \cdot h^3}{12} = 0.036h^4$$

Момент сопротивления этого сечения

$$W_x = \frac{2I_x}{h} = \frac{2 \cdot 0.036h^4}{h} = 0.072h^3$$

Тогда необходимый размер сечения

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{W_x}{0.072}} = \sqrt[3]{\frac{3130}{0.072}} = 35.16 \text{ см} \approx 36 \text{ см}$$

$$b = \frac{h}{2.3} = \frac{36}{2.3} = 15.65 \text{ см} \approx 16 \text{ см}$$

Площадь прямоугольного сечения

$$A_{\text{пр}} = bh = 16 \cdot 36 = 576 \text{ см}^2$$

Сравниваем площади круглого и прямоугольного сечений

$$A_{\text{кр}} = 804.25 \text{ см}^2 > A_{\text{пр}} = 576 \text{ см}^2$$

Следовательно, использование прямоугольного сечения является более рациональным.

4. Проверка прочности более рационального сечения (прямоугольного) по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{453.7 \cdot 10^3}{0.072 \cdot (36 \cdot 10^{-2})^3} = 1.35 \cdot 10^8 \text{ Па} = 135 \text{ МПа} < [\sigma] = 145 \text{ МПа}.$$