

Задание

Вычислить с помощью вычетов интегралы

$$\text{а) } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}, \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$$

Решение.

а) Воспользуемся формулой

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

Пусть $z = e^{it}$. Тогда при изменении t от $t = 0$ до $t = 2\pi$ получаем замкнутый контур $|z| = 1$. Кроме того

$$t = \frac{1}{i} \ln z, \quad dt = \frac{1}{i} \frac{1}{z} dz$$

Осуществляем замену

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t} &= \oint_{|z|=1} \frac{1}{2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}} \frac{1}{i} \frac{1}{z} dz = \oint_{|z|=1} \frac{2}{4 + z + \frac{1}{z}} \frac{1}{i} \frac{1}{z} dz = \\ &= \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4z + 1} \frac{i}{i^2} dz = \oint_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1} dz = \end{aligned}$$

Решение уравнения $z^2 + 4z + 1 = 0$ есть $z_1 = -2 - \sqrt{3}$, $z_2 = -2 + \sqrt{3}$.

Контур $|z| = 1$ принадлежит только точка z_2 , поэтому

$$= 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_2} f(z) =$$

Поскольку точка z_2 - простой полюс, вычисляем вычет по формуле

$$\begin{aligned} &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow z_2} f(z)(z - z_2) = 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1} (z - (-2 + \sqrt{3})) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{-2i}{(z - (-2 + \sqrt{3}))(z - (-2 - \sqrt{3}))} (z - (-2 + \sqrt{3})) = \\ &= 2\pi i \cdot \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{-2i}{z - (-2 - \sqrt{3})} = 2\pi i \cdot \frac{-2i}{(-2 + \sqrt{3}) - (-2 - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{4\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\pi\sqrt{3} \end{aligned}$$

б) Поскольку степень многочлена в числителе на 2 меньше степени многочлена в знаменателе, несобственный интеграл сходится. Для вычисления несобственного интеграла воспользуемся известной формулой

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_k^{\square} \operatorname{res}_{z=z_k \in \operatorname{Im} z > 0} f(z)$$

Решаем уравнение $(z^2 + 1)(z^2 + 9) = 0$, имеющее четыре корня.

$$(z^2 + 1)(z^2 + 9) = 0 \quad \Rightarrow \quad (z^2 - i^2)(z^2 - (3i)^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z - i)(z + i)(z + 3i)(z - 3i) = 0$$

Приравнивая каждый множитель к нулю, имеем

$$z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = -3i, z_4 = 3i$$

Положительную мнимую часть имеют корни z_1 и z_4 . Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} + \operatorname{res}_{z=z_4} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} \right) =$$

Находим вычеты для простых полюсов

$$= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} (z - z_1) + \lim_{z \rightarrow z_4} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)} (z - z_4) \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z^2}{(z + i)(z^2 + 9)} + \lim_{z \rightarrow z_4} \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z + 3i)} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{i^2}{(i + i)(i^2 + 9)} + \frac{(3i)^2}{((3i)^2 + 1)(3i + 3i)} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{i}{2(-1 + 9)} + \frac{9i}{(-9 + 1)6} \right) = \frac{2\pi i^2}{16} + \frac{18\pi i^2}{-48} = \frac{1}{4}\pi.$$